Aproxime $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ por um polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a dois de forma a minimizar o erro E dado por:

$$E = [f(-1) - p(-1)]^2 + \int_{-1}^{1} [f(x) - p(x)]^2 dx + [f(1) - p(1)]^2$$

Esconder resposta

Para começar, podemos **descrever o polinômio** (de grau dois) como:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

A **fórmula do erro** que queremos **minimizar** é dada por:

$$E = [f(-1) - p(-1)]^2 + \int_{-1}^{1} [f(x) - p(x)]^2 dx + [f(1) - p(1)]^2$$

E sabemos também que a função $f(x)$ é:

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

Tendo todos esses dados, podemos começar a calcular o valor da fórmula do erro. Primeiro, vamos verificar o valor de cada uma das substituições nos extremos ($x = -1$ e $x = 1$):

$$f(-1) = -1^{\frac{1}{3}} = -1$$

$$p(1) = a(1)^2 + b(1) + c = a + b + c$$

Agora vamos para as expressões:

$$[f(-1) - p(-1)]^2 = [-1 - (a - b + c)]^2 = [-1 - a + b - c]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [f(-1) - p(-1)]^2 = (1 + a - b + c) + (a + a^2 - ab + ac) + (-b - ab + b^2 - bc) + (c + ac - bc + c^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [f(-1) - p(-1)]^2 = 2a + a^2 - 2ab + 2ac - 2b + b^2 - 2bc + 2c + c^2 + 1$$

Passando para a próxima expressão:

$$[f(1) - p(1)]^2 = [1 - (a + b + c)]^2 = [1 - a - b - c]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [f(1) - p(1)]^2 = (1 - a - b - c) + (-a + a^2 + ab + ac) + (-b + ab + b^2 + bc) + (-c + ac + bc + c^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [f(1) - p(1)]^2 = -2a + a^2 + 2ab + 2ac - 2b + b^2 + 2bc - 2c + c^2 + 1$$

Ainda nos falta calcular a integral:

$$\int_{-1}^{1} [f(x) - p(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} \left[x^{\frac{1}{3}} - (ax^2 + bx + c)\right]^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} [f(x) - p(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} \left[x^{\frac{1}{3}} - ax^2 - bx - c\right]^2 dx$$

Vamos analisar somente a parte **interna** para expandir o quadrado:

Vamos analisar somente a parte **interna** para expandir o quadrado:

$$\left[x^{\frac{1}{3}} - ax^2 - bx - c\right]^2 = \left(x^{\frac{2}{3}} - ax^{\frac{7}{3}} - bx^{\frac{4}{3}} - cx^{\frac{1}{3}}\right) + \left(-ax^{\frac{7}{3}} + a^2x^4 + abx^3 + acx^2\right) + \left(-bx^{\frac{4}{3}} + abx^3 + b^2x^2 + bcx\right) + \left(-cx^{\frac{1}{3}} + acx^2 + bcx + c^2\right)$$

$$\left[x^{\frac{1}{3}} - ax^2 - bx - c\right]^2 = a^2x^4 + 2abx^3 - 2ax^{\frac{7}{3}} + (b^2 + 2ac)x^2 - 2bx^{\frac{4}{3}} + 2bcx + x^{\frac{2}{3}} - 2cx^{\frac{1}{3}} + c^2$$

Voltando para a **integral:**

$$\int_{-1}^{1} [f(x) - p(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} a^2x^4 + 2abx^3 - 2ax^{\frac{7}{3}} + (b^2 + 2ac)x^2 - 2bx^{\frac{4}{3}} + 2bcx + x^{\frac{2}{3}} - 2cx^{\frac{1}{3}} + c^2 \, dx$$

Essa integral nada mais é do que uma integral de vários termos do tipo x^n. Usando a **regra do tombo para integrais**, resolvemos e ficamos com:

$$\int_{-1}^{1} [f(x) - p(x)]^2 dx = \frac{a^2x^5}{5} + \frac{2abx^4}{4} - \frac{2ax^{\frac{10}{3}}}{10/3} + \frac{x^3(b^2 + 2ac)}{3} - \frac{2bx^{\frac{7}{3}}}{7/3} + bcx^2 + \frac{x^{\frac{5}{3}}}{5/3} - \frac{2cx^{\frac{4}{3}}}{4/3} + c^2x\Big|_{-1}^{1}$$

Simplificando os termos:

$$\int_{-1}^{1} [f(x) - p(x)]^2 dx = \frac{a^2x^5}{5} + \frac{abx^4}{4} - \frac{3ax^{\frac{10}{3}}}{5} + \frac{x^3(b^2 + 2ac)}{3} - \frac{6bx^{\frac{7}{3}}}{7} + bcx^2 + \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} - \frac{3cx^{\frac{4}{3}}}{2} + c^2x\Big|_{-1}^{1}$$

Substituindo os limites de integração:

Substituindo os limites de integração:

$$\frac{a^2 1^5}{5} + \frac{ab(1)^4}{4} - \frac{3a(1)^{\frac{10}{3}}}{5} + \frac{(1)^3(b^2 + 2ac)}{3} - \frac{6b(1)^{\frac{7}{3}}}{7} + bc(1)^2 + \frac{3(1)^{\frac{5}{3}}}{5} - \frac{3c(1)^{\frac{4}{3}}}{2} + c^2(1) -$$

$$\left(\frac{a^2(-1)^5}{5} + \frac{ab(-1)^4}{4} - \frac{3a(-1)^{\frac{10}{3}}}{5} + \frac{(-1)^3(b^2 + 2ac)}{3} - \frac{6b(-1)^{\frac{7}{3}}}{7} + bc(-1)^2 + \frac{3(-1)^{\frac{5}{3}}}{5} - \frac{3c(-1)^{\frac{4}{3}}}{2} + c^2(-1)\right)$$

Juntando todos os termos, ficamos com:

$$\int_{-1}^{1} [f(x) - p(x)]^2 dx = \frac{2a^2}{5} + \frac{2b^2}{3} + \frac{4ac}{3} - \frac{12b}{7} + \frac{6}{5} + 2c^2$$

Com todos os dados, podemos voltar para a expressão do erro:

$$E = [f(-1) - p(-1)]^2 + \int_{-1}^{1} [f(x) - p(x)]^2 dx + [f(1) - p(1)]^2$$

$$E = 2a + a^2 - 2ab + 2ac - 2b + b^2 - 2bc + 2c + c^2 + 1 + \frac{2a^2}{5} + \frac{2b^2}{3} + \frac{4ac}{3} - \frac{12b}{7} + \frac{6}{5} + 2c^2 + (-2a + a^2 + 2ab + 2ac - 2b + b^2 + 2bc - 2c + c^2 + 1)$$

Juntando os termos semelhantes:

$$E = (2a - 2a) + \left(a^2 + \frac{2a^2}{5} + a^2\right) + (-2ab + 2ab) + \left(2ac + \frac{4ac}{3} + 2ac\right) + \left(-2b - \frac{12b}{7} - 2b\right) + \left(b^2 + \frac{2b^2}{3} + b^2\right) + \ldots$$

$$\ldots(-2bc + 2bc) + (2c - 2c) + (c^2 + 2c^2 + c^2) + \left(1 + \frac{6}{5} + 1\right)$$

Simplificando:

$$E = \frac{12a^2}{5} + \frac{16ac}{3} - \frac{40b}{7} + \frac{8b^2}{3} + 4c^2 + \frac{16}{5}$$

Para **minimizar** o erro, basta considerar que ele depende de a, b e c ($E(a,b,c)$). Assim, basta **derivar** a expressão em relação a cada uma das variáveis e **igualar a zero**. Vamos fazer isso:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{24a}{5} + \frac{16c}{3} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = -\frac{40}{7} + \frac{16b}{3} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial c} = \frac{16a}{3} + 8c = 0$$

Podemos rearranjar essas 3 equações em um sistema:

$$\begin{cases} \frac{24a}{5} + \frac{16c}{3} = 0 \\ -\frac{40}{7} + \frac{16b}{3} = 0 \\ \frac{16a}{3} + 8c = 0 \end{cases}$$

A partir da segunda equação, obtemos:

$$-\frac{40}{7} + \frac{16b}{3} = 0 \Rightarrow b = \frac{40 \cdot 3}{7 \cdot 16} \Rightarrow b = \frac{15}{14}$$

Isolando c na terceira equação:

$$c = -\frac{16a}{3 \cdot 8} \Rightarrow c = -\frac{2a}{3}$$

Substituindo na primeira equação:

$$\frac{24a}{5} + \frac{16}{3} \cdot \left(-\frac{2a}{3}\right) = 0 \Rightarrow a = 0$$

Substituindo $a = 0$ na terceira equação:

$$0 + 8c = 0 \Rightarrow c = 0$$

Uma vez que conhecemos todos os coeficientes, basta colocar de volta na **equação do polinômio**:

$$p(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow p(x) = \frac{15x}{14}$$

Note que, de fato, esse polinômio minimiza o erro. Essa verificação é importante pois não sabemos se o polinômio encontrado é um ponto de máximo ou de mínimo da função E.

Calculando o erro com os valores encontrados para os coeficientes, temos:

$$E = \frac{12 \cdot 0^2}{5} + \frac{16 \cdot 0 \cdot 0}{3} - \frac{40 \cdot \frac{15}{14}}{7} + \frac{8 \cdot \left(\frac{15}{14}\right)^2}{3} + 4 \cdot 0^2 + \frac{16}{5}$$

$$\Rightarrow E = \frac{34}{245}$$

Como esse ponto é necessariamente um ponto de máximo ou mínimo, basta comparar seu valor com outros possíveis valores. Usando $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$, por exemplo, teríamos:

$$E = \frac{12 \cdot 1^2}{5} + \frac{16 \cdot 1 \cdot 1}{3} - \frac{40 \cdot 1}{7} + \frac{8 \cdot 1^2}{3} + 4 \cdot 1^2 + \frac{16}{5}$$

$$\Rightarrow E = \frac{416}{35}$$

O erro para o polinômio $p(x) = \frac{15x}{14}$ é menor, então, de fato, esse é o polinômio que minimiza o erro quadrático.

Resposta esperada: $\boldsymbol{p(x) = \frac{15x}{14}}$

Mediu-se um sinal periódico de período P nos instantes uniformemente espaçados $t_i = ih, i \in \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq 7,\ h = P/8$, obtendo-se os seguintes valores:

t	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
$s(t)$	1	-1	2	0	1	-1	3	1

b. Na expansão $s(t) = \sum_{k=-3}^{4} a_k e^{jkt}$, onde $j^2 = -1$, qual o valor de a_2?

Esconder resposta

Para esse exercício, temos a função $s(t)$ definida pelo somatório:

$$s(t) = \sum_{k=-3}^{4} \bar{a}_k e^{jkt}$$

E queremos encontrar o valor de a_2. Vamos começar expandindo a série:

$$s(t) = \bar{a}_{-3}e^{j(-3)t} + \bar{a}_{-2}e^{j(-2)t} + \bar{a}_{-1}e^{j(-1)t} + \bar{a}_0 e^{j(0)t} + \bar{a}_1 e^{j(1)t} + \bar{a}_2 e^{j(2)t} + \bar{a}_3 e^{j(3)t} + \bar{a}_4 e^{j(4)t}$$

Rearranjando os termos:

$$s(t) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 e^{jt} + \bar{a}_{-1}e^{-jt} + \bar{a}_2 e^{2jt} + \bar{a}_{-2}e^{-2jt} + \bar{a}_3 e^{3jt} + \bar{a}_{-3}e^{-3jt} + \bar{a}_4 e^{4jt}$$

Vamos transformar as exponenciais em senos e cossenos através da **fórmula de Euler**, que é:

$$e^{jux} = \cos(ux) + j\sin(ux), j \in \mathbb{C}$$

Lembrando que:

$$\cos(-x) = \cos(x) \text{ e } \sin(-x) = -\sin(x)$$

Assim:

$$s(t) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1\left(\cos(t) + j\sin(t)\right) + \bar{a}_{-1}\left(\cos(t) - j\sin(t)\right) + \bar{a}_2\left(\cos(2t) + j\sin(2t)\right) + \bar{a}_{-2}\left(\cos(2t) - j\sin(2t)\right) + \ldots$$

Agora, note que encontramos uma expressão que representa o **sinal** $s(t)$. No item **a**, já havíamos encontrado uma expressão para isso, dada pela função $g(x)$, obtida pela análise harmônica:

$$g(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\cos x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + a_3\cos 3x + b_3\sin 3x + \ldots$$

Colocando as expressões em um sistema (pois vale a igualdade entre elas):

$$\begin{cases} s(t) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1\left(\cos(t) + j\sin(t)\right) + \bar{a}_{-1}\left(\cos(t) - j\sin(t)\right) + \bar{a}_2\left(\cos(2t) + j\sin(2t)\right) + \bar{a}_{-2}\left(\cos(2t) - j\sin(2t)\right) + \ldots \\ g(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\cos x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots \end{cases}$$

Como as funções s e g são **equivalentes**, as variáveis x e t são **análogas**, então vamos chamar ambas de x (para facilitar a comparação):

$$\begin{cases} s(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1\left(\cos(x) + j\sin(x)\right) + \bar{a}_{-1}\left(\cos(x) - j\sin(x)\right) + \bar{a}_2\left(\cos(2x) + j\sin(2x)\right) + \bar{a}_{-2}\left(\cos(2x) - j\sin(2x)\right) + \dots \\ g(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\cos x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \dots \end{cases}$$

Como queremos descobrir o valor de $\bar{a}_2$, podemos procurar uma relação entre as expressões. Note que temos $\cos 2x$ e $\sin 2x$ em ambas, e, por isso, vale as seguintes igualdades:

$$\bar{a}_2\cos 2x + \bar{a}_{-2}\cos 2x = a_2\cos 2x\ (I)$$

$$\bar{a}_2 j\sin 2x - \bar{a}_{-2} j\sin 2x = b_2\sin 2x\ (II)$$

Da equação (I), para quando o cosseno não for nulo, vale que:

$$\bar{a}_2 + \bar{a}_{-2} = a_2\ (III)$$

E da equação (II), para quando o seno for diferente de zero:

$$\bar{a}_2 j - \bar{a}_{-2} j = b_2$$

Dividindo todos os termos por j (e lembrando que $\frac{1}{j} = -j$):

$$\bar{a}_2 - \bar{a}_{-2} = -b_2 j\ (IV)$$

Finalmente, somando as equações (III) e (IV), obtemos:

$$2\bar{a}_2 = a_2 - b_2 j$$

$$\Rightarrow \bar{a}_2 = \frac{a_2 - b_2 j}{2}$$

Precisamos apenas calcular a_2 e b_2 para descobrir o valor de $\bar{a}_2$. Ambos são **coeficientes da análise harmônica discreta**, portanto, vale que:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2N} f(x_j)\cos\left(k\frac{\pi}{N}j\right) \text{ e } b_k = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2N} f(x_j)\sin\left(k\frac{\pi}{N}j\right)$$

No caso, $k = 2$ e, como visto no item **a**, $N = 4$, então:

$$a_2 = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{8} f(x_j)\cos\left(\frac{\pi}{2}j\right) \text{ e } b_2 = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{8} f(x_j)\sin\left(\frac{\pi}{2}j\right)$$

Vamos começar calculando a_2:

$$a_2 = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{8} f(x_j)\cos\left(\frac{\pi}{2}j\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left((1)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + (-1)\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + (2)\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + (0)\cos\left(\frac{4\pi}{2}\right) + (1)\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + (-1)\cos\left(\frac{6\pi}{2}\right) + (3)\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) +\right.$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{1}{4}\left((1)\cdot(0) + (-1)\cdot(-1) + (2)\cdot(0) + (0)\cdot(1) + (1)\cdot(0) + (-1)\cdot(-1) + (3)\cdot(0) + (1)\cdot(1)\right) = 0,75$$

E, agora, podemos calcular b_2:

$$b_2 = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{8} f(x_j)\sin\left(\frac{\pi}{2}j\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left((1)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + (-1)\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) + (2)\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + (0)\sin\left(\frac{4\pi}{2}\right) + (1)\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) + (-1)\sin\left(\frac{6\pi}{2}\right) + (3)\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) +\right.$$

$$b_2 = \frac{1}{4}\left((1)\cdot(1) + (-1)\cdot(0) + (2)\cdot(-1) + (0)\cdot(0) + (1)\cdot(1) + (-1)\cdot(0) + (3)\cdot(-1) + (1)\cdot(0)\right) = -0,75$$

Retomando a equação que determina $\bar{a}_2$, chegamos em:

$$\bar{a}_2 = \frac{0,75 - (-0,75)j}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{a}_2 = \frac{0,75 + 0,75j}{2} = 0,375 + 0,375j$$

Resposta esperada: $\boldsymbol{\bar{a}_2 = 0,375 + 0,375j}$

A velocidade de um jato varia com o tempo de acordo com a seguinte expressão:

$$v(t) = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt$$

Onde $u = 2 \cdot 10^3\ m/s, m_0 = 14 \cdot 10^4\ kg, q = 21 \cdot 10^2\ kg/s$ e $g = 9,8\ m/s^2$.

Determine a velocidade média do jato no intervalo 0 a $4\ s$ com erro menor que $0,05\ m/s$, usando o método dos trapézios.

Dado: $|E_t| \leq \max|f''(x)|\ \dfrac{(b-a)h^2}{12}$

Esconder resposta

O enunciado nos dá a **fórmula da velocidade** do jato e nos pede a velocidade média num intervalo de 0 a $4\ s$. A velocidade média (v_m) é dada pela integral:

$$v_m = \frac{1}{4}\int_0^4 v(t)\ dt$$

Então o que precisamos fazer é **resolver essa integral numericamente** pelo método dos trapézios.

A primeira etapa é calcular o passo (h), e isso deve ser feito de forma que o **erro** seja **menor ou igual** ao **valor dado** no enunciado.

O erro dado para a velocidade é $0,05$, mas como nossa integral é dividida por 4, o erro máximo é 4 vezes maior que o erro da velocidade, assim:

$$erro = 0,2$$

Utilizando a fórmula do erro do método dos trapézios:

$$|E_t| \leq \max|v''(t)|\frac{(b-a)h^2}{12} \leq 0,2$$

Substituindo os valores que temos:

$$\max|v''(t)|\frac{(4-0)h^2}{12} \leq 0,2 \Rightarrow \max|v''(t)|\frac{h^2}{3} \leq 0,2$$

Precisamos descobrir o valor de $\max|v''(t)|$, ou seja, o maior valor assumido pelo módulo da segunda derivada no intervalo em questão.

Vamos calcular as derivadas da função $v(t) = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt$. A primeira derivada vai ser (utilizamos a **regra da cadeia** e **regra do quociente**):

$$v'(t) = u \cdot \frac{1}{\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right)} \cdot \left(\frac{0 \cdot (m_0 - qt) - m_0 \cdot (-q)}{(m_0 - qt)^2}\right) - g$$

$$\Rightarrow v'(t) = u\left(\frac{q}{m_0 - qt}\right) - g$$

Derivando novamente:

$$v''(t) = u \cdot \left(\frac{0 \cdot (m_0 - qt) - q \cdot (-q)}{(m_0 - qt)^2} \right) - 0$$

$$\Rightarrow v''(t) = \frac{u \cdot q^2}{(m_0 - qt)^2}$$

Substituindo o valor das constantes:

$$v''(t) = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot (21 \cdot 10^2)^2}{(14 \cdot 10^4 - 21 \cdot 10^2 t)^2} \Rightarrow v''(t) = \frac{882 \cdot 10^7}{(14 \cdot 10^4 - 21 \cdot 10^2 t)^2}$$

Para obtermos o valor máximo da segunda derivada, o **denominador** precisa ser o **menor** possível; como t está sendo subtraído, ele deve ser o **maior** possível dentro do intervalo $[0; 4]$. Logo:

$$\max |v''(t)| = v''(4) = \frac{882 \cdot 10^7}{(14 \cdot 10^4 - 21 \cdot 10^2 (4))^2} = 0,50928$$

Voltando para a inequação do erro, temos:

$$0,50928 \cdot \frac{h^2}{3} \leq 0,2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h \leq 1,0854$$

Como o número de passos precisa ser inteiro, teremos $h = 1$.

Montando o método dos trapézios e adotando $h = 1$:

$$\int_0^4 v(t)\, dt \approx A = \frac{1}{2} \left[v(0) + 2\left(v(1) + v(2) + v(3) \right) + v(4) \right]$$

Agora o problema está simples, basta calcular $v(t)$ para $t = 1, 2, 3$ e 4:

$$v(0) = u \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - q \cdot 0} \right) - g \cdot 0 = 0$$

$$v(1) = u \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - q \cdot 1} \right) - g \cdot 1 = 20,42728$$

$$v(2) = u \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - q \cdot 2} \right) - g \cdot 2 = 41,31841$$

$$v(3) = u \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - q \cdot 3} \right) - g \cdot 3 = 62,68788$$

$$v(4) = v(t) = u \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - q \cdot 4} \right) - g \cdot 4 = 84,55081$$

Calculando a área:

$$A = \frac{1}{2} \left[0 + 2\left(20,42726 + 41,31841 + 62,68788 \right) + 84,55081 \right]$$

$$A = 166,70896$$

Tendo o valor da área, basta dividir por 4 para encontrar a velocidade. Assim:

$$v_m = \frac{1}{4} \cdot A = 41,67724\, m/s$$

Resposta esperada: $\boldsymbol{v_m = 41,67724\, m/s}$

O método de Runge-Kutta de quarta ordem, para a solução aproximada de uma equação diferencial

$$x'(t) = f\left(t, x(t)\right), x\left(t_0\right) = x_0$$

É dado por:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k4\right)$$

Onde x_i aproxima a solução no instante $t_i = t_0 + hi$, e:

$$k_1 = f\left(t_i, x_i\right);$$

$$k_2 = f\left(t_i + 0,5h, x_i + 0,5hk_1\right);$$

$$k_3 = f\left(t_i + 0,5h, x_i + 0,5hk_2\right);$$

$$k_4 = f\left(t_i + h, x_i + hk_3\right)$$

Determine qual a aproximação que se obtém para o valor de $x(1)$ ao se utilizar este método para resolver $x'(t) = x(t)$, $x(0) = 1$ com um espaçamento $h = \frac{1}{n}$, com n qualquer. Avalie numericamente qual o valor obtido com $n = 1, n = 2$ e $n = 4$ e compare com o valor da solução exata da equação diferencial.

Esconder resposta

Vamos começar encontrando a **solução exata** da equação. Nossa equação é dada por:

$$x'(t) = x(t)$$

Passando os termos para o lado esquerdo, ficamos com:

$$x'(t) - x(t) = 0$$

Como essa equação possui **coeficientes constantes**, assumimos que a solução é do tipo:

$$x(t) = e^{st}$$

A derivada será:

$$x'(t) = se^{st}$$

Assim, a EDO pode ser reescrita como sua **equação característica**:

$$se^{st} - e^{st} = 0 \Rightarrow s - 1 = 0$$

$$\Rightarrow s = 1$$

Com isso, conseguimos descobrir que:

$$x(t) = e^t$$

Para descobrir a solução exata, basta substituir $t = 1$:

$$x(1) = e^1 \approx 2,718282$$

Agora vamos buscar os resultados numéricos através do método de Runge-Kutta. Sabemos, do enunciado que $t_0 = 0$ e $x_0 = 1$.

Vamos começar assumindo $n = 1$. Nesse caso, vale que:

$$h = \frac{1}{n} = \frac{1}{1} \Rightarrow h = 1$$

Tendo h, basta aplicar:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k4\right)$$

Além disso, vale também que $x_{i+1} = x_i + i \cdot h$.

Vamos encontrar os parâmetros k:

$$k_1 = f\left(t_0; x_0\right) = x_0 = 1$$

$$k_2 = f\left(t_0 + 0;5h, x_0 + 0,5hk_1\right) = x_0 + 0,5hk_1 = 1 + 0,5 \cdot 1 \cdot 1 = 1,5$$

$$k_3 = f\left(t_i + 0,5h; x_0 + 0,5hk_2\right) = x_0 + 0,5hk_2 = 1 + 0,5 \cdot 1 \cdot 1,5 = 1,75$$

$$k_4 = f(t_i + h; x_0 + hk_3) = x_0 + hk_3 = 1 + 1 \cdot 1,75 = 2,75$$

Basta aplicar todos os k na fórmula:

$$x_1 = x(1) = x_0 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k4\right)$$

$$x_1 = x(1) = 1 + \frac{1}{6}(1 + 2 \cdot 1,5 + 2 \cdot 1,75 + 2,75) \approx 2,708333$$

Encontramos o **resultado numérico** para $n = 1$.

Vamos agora encontrar o resultado para quando $n = 2$. Dessa vez, vale que:

$$h = \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = 0,5$$

Mais uma vez, temos que:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k4\right)$$

Além disso, vale também que: $x_{i+1} = x_i + i \cdot h$.

Agora, como $h = 0,5$, precisaremos realizar o processo duas vezes. Vamos encontrar os parâmetros k, lembrando que $x'(t) = f\left(t, x(t)\right) = x(t)$:

$$k_1 = f\left(t_0, x_0\right) = x_0 = x(0) = 1$$

$$k_2 = f\left(t_0 + 0,5h, x_0 + 0,5hk_1\right) = x_0 + 0,5hk_1 = 1 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1 = 1,25$$

$$k_3 = f\left(t_0 + 0,5h, x_0 + 0,5hk_2\right) = x_0 + 0,5hk_2 = 1 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,25 = 1,3125$$

$$k_4 = f(t_0 + h; x_0 + hk_3) = x_0 + hk_3 = 1 + 0,5 \cdot 1,3125 = 1,65625$$

Aplicando todos os k na fórmula:

$$x_1 = x(0,5) = x_0 + \frac{0,5}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$x(0,5) = 1 + \frac{0,5}{6}(1 + 2 \cdot 1,25 + 2 \cdot 1,3125 + 1,65625) = 1,6484375$$

Agora, tendo $x_1 = 1,6484375$, precisamos realizar o processo novamente:

$$k_1 = f(t_1, x_1) = x_1 = 1,6484375$$

$$k_2 = f(t_1 + 0,5h, x_1 + 0,5hk_1) = 1,6484375 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,6484375 = 2,060546875$$

$$k_3 = f(t_1 + 0,5h, x_1 + 0,5hk_2) = 1,6484375 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 2,060546875 = 2,163574219$$

$$k_4 = f(t_1 + h; x_1 + hk_3) = 1,6484375 + 0,5 \cdot 2,163574219 = 2,730224610$$

Aplicando todos os k na fórmula novamente:

$$x_2 = x(1) = x_1 + \frac{0,5}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$x(1) = 1,648437474 + \frac{0,5}{6}(1,6484375 + 2 \cdot 2,060546875 + 2 \cdot 2,163574219 + 2,730224610)$$

$$x(1) = 2,7173475$$

Com isso, descobrimos o valor de $x(1)$ para quando $n = 2$.

Resta apenas encontrar $x(1)$ para quando $n = 4$. Neste caso, $h = 0,25$ e teremos 4 iterações. Podemos montar uma tabela, utilizando:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k4)$$

Fazendo isso, ficamos com:

i	x_i	k_1	k_2	k_3	k_4	x_{i+1}
0	1	1	1,125	1,140625	1,285156	1,284016927
1	1,284017	1,284017	1,444519	1,464582	1,650162	1,648699469
2	1,648699	1,648699	1,854787	1,880548	2,118836	2,116958026
3	2,116958	2,116958	2,381578	2,414655	2,720622	2,718209939
4	2,71821					

Com isso, temos que $x(1) = 2,71821$ para $n = 4$.

Para finalizar, vamos montar uma tabela com todas as nossas respostas e verificar os erros (dados pela diferença entre o valor numérico calculado e o valor real, em módulo):

n	$x(1)$	$\lvert Erro \rvert$
Solução exata	2,718282	0
$n = 1$	2,708333	$9,948 \cdot 10^{-3}$
$n = 2$	2,717346	$9,356 \cdot 10^{-4}$
$n = 4$	2,718210	$7,190 \cdot 10^{-5}$